Teste Intermédio
Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 27.01.2011

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

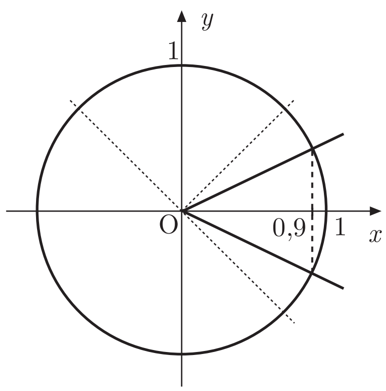
A opção **(D)** é excluída, porque o ponto $(0{,}1)$ não pertence à fronteira da região admissível.

Relativamente às restantes opções, tem-se:

Opções	x	y	$L = 2x + y$
(A)	1	1	$L = 2 \times 1 + 1 = 3$
(B)	0	2	$L = 2 \times 0 + 2 = 2$
(C)	3	1	$L = 2 \times 3 + 1 = 7$

2. Resposta **(C)**

Na figura, estão representados o círculo trigonométrico, os lados extremidade dos ângulos cujo coseno é $0{,}9$ e, a ponteado, os lados extremidade dos ângulos que têm $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ radianos de amplitude.



Como se pode observar:

- no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ tem duas soluções;

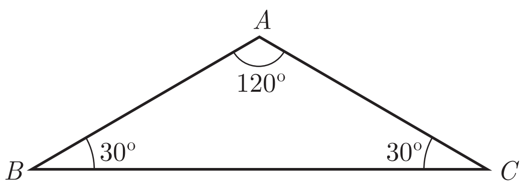
- no intervalo $\left[0, \pi\right]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ tem uma solução;

- no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ não tem solução;

- no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ tem duas soluções.

3. Resposta **(B)**

Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$



Tem-se $\overrightarrow{AB} \, . \, \overrightarrow{AC} = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \, \hat{} \, \overrightarrow{AC} \right) =$

$= 8 \times 8 \times \cos 120^{\text{o}} = 64 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -32$

4. Resposta **(B)**

Recorrendo à calculadora, podemos obter um valor aproximado da amplitude, em radianos, do ângulo pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a 2

Tem-se $\operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 1{,}107$

Portanto, $\alpha \approx 1{,}107 + \pi \approx 4{,}25$

5. Resposta **(D)**

Como $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, tem-se $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Como $\alpha + \theta = 2\pi$, tem-se $\theta = 2\pi - \alpha$

Logo, $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{sen}\left(2\pi - \alpha\right) =$

$= \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$

GRUPO II

1.1. No triângulo $[OPQ]$, o segmento de recta $[PR]$ é a altura relativa à base $[OQ]$

Assim, a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\dfrac{\overline{OQ} \times \overline{PR}}{2}$

Tem-se:

- $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OR}}{5}$, pelo que $\overline{OR} = 5\cos\alpha$ e, portanto, $\overline{OQ} = 10\cos\alpha$

- $\text{sen}\alpha = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{PR}}{5}$, pelo que $\overline{PR} = 5\ \text{sen}\alpha$

Portanto, a área do triângulo $[OPQ]$ é $\dfrac{10\cos\alpha \times 5\ \text{sen}\alpha}{2} = 25\,\text{sen}\alpha\cos\alpha = f(\alpha)$

1.2. $f(\alpha) = 25\cos^2\alpha \Leftrightarrow 25\,\text{sen}\alpha\cos\alpha = 25\cos^2\alpha \Leftrightarrow \text{sen}\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha$

Como $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos\alpha \neq 0$

Portanto, para $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\text{sen}\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

1.3. $f(\theta) = 10 \Leftrightarrow 25\,\text{sen}\theta\cos\theta = 5 \Leftrightarrow \text{sen}\theta\ \cos\theta = \dfrac{1}{5}$

Então

$$(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta + 2\ \text{sen}\theta\ \cos\theta + \cos^2\theta =$$

$$= \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta = 1 + 2\text{sen}\theta\cos\theta =$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{5} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

Portanto,

$$(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \frac{7}{5}$$

1.4. A ordenada do ponto P é $\overline{PR}$

Como o triângulo $[OPR]$ é rectângulo, por aplicação do teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OR}^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

Assim, as coordenadas do ponto P são $(3,\, 4)$

Vamos determinar a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P por dois processos.

1.º Processo

A recta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à recta OP. Como o vector $\overrightarrow{OP}$ tem coordenadas $(3,\, 4)$, o declive da recta OP é $\frac{4}{3}$ e, portanto, o declive da recta tangente à circunferência no ponto P é $-\frac{3}{4}$

Assim, a equação reduzida da recta pedida é da forma $y = -\frac{3}{4}x + b$

Como o ponto P pertence a esta recta, vem

$$4 = -\frac{3}{4} \times 3 + b \Leftrightarrow 4 = -\frac{9}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{25}{4}$$

Assim, a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P é $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

2.º Processo

Um ponto $G(x, y)$ pertence à recta tangente à circunferência no ponto P se e só se os vectores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{GP}$ forem perpendiculares, ou seja, se e só se $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{GP} = 0$

Tem-se

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (3,4) - (0,0) = (3,4)$$

$$\overrightarrow{GP} = P - G = (3,4) - (x,y) = (3-x,\ 4-y)$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{GP} = 0 \Leftrightarrow (3,4) \cdot (3-x,\ 4-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(3-x) + 4(4-y) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3x + 16 - 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4y = 3x - 25 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

Portanto, a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P é

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

2.1.1. Dois planos paralelos admitem o mesmo vector normal. Portanto, uma condição cartesiana do plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial é $5x + 2y + 2z = 0$

2.1.2. Um plano perpendicular à recta QN é paralelo ao plano yOz

Portanto, o plano pedido pode ser definido por uma equação da forma $x = k$

Como o ponto V tem abcissa 2, uma condição cartesiana do plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V é $x = 2$

2.1.3. O plano QTV é definido pela equação $5x + 2y + 2z = 12$

Então, o vector de coordenadas $(5,\ 2,\ 2)$ é perpendicular ao plano QTV, sendo, portanto, um vector director da recta de que se pretende escrever uma condição cartesiana.

Uma condição cartesiana da recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto $U(4, -4, -4)$ é

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+4}{2}$$

2.1.4. O ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$, e o raio da superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T é $\overline{UT} = 4$

Uma equação cartesiana dessa superfície esférica é $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 16$

2.2. Seja z a cota do ponto A

Então o ponto A tem coordenadas $(4,\ -4,\ z)$ e, portanto, o vector $\overrightarrow{OA}$ tem coordenadas $(4,\ -4,\ z)$

O ponto T tem coordenadas $(4,\ 0,\ -4)$ e, portanto, o vector $\overrightarrow{OT}$ tem coordenadas $(4,\ 0,\ -4)$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OT} = 8 \Leftrightarrow (4, -4, z) \cdot (4, 0, -4) = 8 \Leftrightarrow 16 - 4z = 8 \Leftrightarrow z = 2$$

Portanto, o ponto A tem cota 2

2.3. O volume do poliedro $[VNOPQURST]$ pode obter-se como soma do volume do cubo $[NOPQURST]$ com o volume da pirâmide $[VNOPQ]$

O cubo tem aresta 4 e, portanto, o seu volume é $4^3 = 64$

Para calcular o volume da pirâmide é necessário determinar a sua altura.

A altura da pirâmide é igual à cota do ponto V. Este ponto é o ponto do plano QTV que tem abcissa 2 e ordenada -2

Substituindo x por 2 e y por -2 na equação do plano QTV, obtém-se:

$$5 \times 2 + 2 \times (-2) + 2z = 12 \Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$$

Tem-se, então, que a altura da pirâmide é igual a 3. Como a base da pirâmide é um quadrado de lado 4, o volume da pirâmide é $\frac{16 \times 3}{3} = 16$

O volume do poliedro $\left[VNOPQURST\right]$ é $64 + 16 = 80$

3. Tem-se $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$ e $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

Então,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right) = \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \\
&= 0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AB} = \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \\
&= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \\
&= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2
\end{aligned}
$$